Universität Fribourg, Philosophisches Departement

Seminar Zeitgenössische Metaphysik SS 2006

Gibt es Mengen?

Eine metaphysische Betrachtung der Mengenlehre

http://www.aleph1.info/setintro/set.html#Anchor-Set%20T-40428

Seminar-Arbeit von: Michael Haene

Rte Joseph-Chaley 11

1700 Fribourg

026 481 28 58

Eingereicht bei Philipp Keller, Dipl. Ass.

am 22. Februar 2007

Inhaltsverzeichnis

„It all seems so innocent at first!"[1]

1. Einführung

Die Mengenlehre ist aus der Mathematik nicht wegzudenken, denn *„most of mathematics is into set theory up to its ears."*[2] Es kann gezeigt werden, dass die gesamte Mathematik mit all ihren Teilgebieten in Mengenbegriffen ausgedrückt und somit auf Mengenlehre zurückgeführt werden kann. Doch auch für die Philosophie erweist sich die Mengenlehre als äusserst interessant: Einige ihrer Eigenschaften oder Prinzipien werfen grosse philosophische Fragen auf, die den Mathematiker im täglichen Business nicht weiter beeinträchtigen, dem Metaphysiker aber leicht schlaflose Nächte bereiten können. Gemäss Pollard kann sogar von einem Mythos der Mengenlehre gesprochen werden, den es zu entlarfen gilt: "*The apparent familiarity of mathematical sets is a dangerous illusion which must be dispelled by philosophical therapy before any fundamental progress in the philosophy of set theory can be made.*"[3]

Was soll uns nun davon abhalten, die Theorie der Mengen mit ihren Begriffen in vielleicht naiver Weise zu übernehmen und anzuwenden, wo sie sich doch als so fruchtbar für die Mathematik erwiesen hat? Die Mengenlehre beruht erstens auf einem von Cantor eingeführten Begriff von Unendlichkeit, so dass sie als „Mathematik des Unendlichen" bezeichnet wurde. Philosophisch ist der Begriff des Unendlichen etwas schwieriger zu erfassen – wie soll man sich zum Beispiel vorstellen, dass es nicht nur *das* Unendliche gibt, sondern eine ganze Hierarchie von *Unendlichkeiten*? Diese ‚ontologische Extravaganz' wirft natürlich grosse Fragen auf in einer Denkweise, welche sich der ontologischen Sparsamkeit verpflichtet fühlt. Zweitens ist die Mengentheorie strukturierend in dem Sinne, dass Beziehungen zwischen Mengen genau dargestellt werden können. Die Mengenbeziehung verbindet die einzelnen Mengen mit ihren Elementen, sowie Mengen mit anderen Mengen. Die einzelnen Elemente und die verschiedenen Mengen können nun ganz unterschiedlicher Natur sein, die Mengenbeziehung selbst ist jedoch stets dieselbe. Wie ist es möglich, dass immer *dieselbe* Beziehung *unterschiedliche* Dinge miteinander verbindet? Drittens, und für diese Arbeit der wichtigste Punkt, ist es eine Tatsache, dass die Mengenlehre sozusagen ‚auf Nichts baut'. Um die Mengenlehre als mathematische Theorie zu nutzen, braucht es keinerlei Objekte, Mengen können aus sich selbst gebildet und darauf eine ganze Hierarchie aufgebaut werden. Um diese Mengenhierarchie aufzubauen, benötigen wir nicht einmal ein einzelnes Objekt, sondern der Begriff der leeren Menge, d.h. jener Menge, welche kein Element enthält, kann als Basis dienen. In den Mathematik werden jene Mengen, welche nur Mengen enthalten, als *pure sets* bezeichnet und von den *impure sets*, welche auch andere Dinge (Urelemente) enthalten, unterschieden.

[1] Lewis (1991:5)
[2] Lewis (1991:58)
[3] Pollard (1990:14)

2. Lewis' Projekt

Für den Metaphysiker ist die traditionelle Konzeption der Mengenlehre vor allem aus einem Grund nicht zufriedenstellend: Sie generiert unendliche viele Objekte. So existiert z.B. nicht nur meine Kaffeetasse, sondern auch das Singleton der Kaffeetasse, das Singleton des Singletons der Kaffeetasse, und so weiter *ad infinitum*. Wie Zermelo gezeigt hatte, kann sogar eine ganze Hierarchie auf der leeren Menge aufgebaut werden: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, ... Der Vorteil für den Mathematiker ist offensichtlich: wenn $\varnothing$ mit Null gleichgesetzt wird, $\{\varnothing\}$ mit 1, $\{\{\varnothing\}\}$ mit 2 und so weiter, dann kann können alle natürlichen Zahlen als Mengen ausgedrückt werden. Eine Alternative dazu schlägt von Neumann vor: Analog Zermelo wird Null mit der leeren Menge gleichgesetzt, 1 mit der Vereinungsmenge von Null und dem Singleton von Null, also $\{\varnothing\}$, 2 mit der Vereinigungsmenge von 1 und dessen Singleton, also $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 3 mit der Vereinigungsmenge von 2 und dessen Singleton, also $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, etc. Der Nachfolger $x + 1$ ist jeweils die Vereinigungsmenge von x und dessen Singleton $\{x\}$, also $x \cup \{x\}$.

Da diese unendlichen Hierarchien für alle Objekte möglich sind, bedeutet dies, dass auch alle diese Singletons, Singletons von Singletons, etc. tatsächlich in irgendeiner Form existieren. Dem Metaphysiker bereitet es grösste Kopfschmerzen, wie er diese unendliche und unübersichtliche Vielfalt von Mengen und Mengen von Mengen in die ontologische Struktur der Welt hineinpacken kann. Selbst wenn man sich damit abfinden könnte, *dass* es neben der Vielfalt von Objekten unendlich viele Mengen gibt in der Welt, stellt sich dennoch die Frage, *woher* diese kommen. Mit Goodman[4] könnte man nach einer ‚generating-relation' suchen, einem Prinzip, welches aus bestimmten Objekten neue Objekte bildet, wobei aus gleichen Teilen nie verschiedene Dinge produziert werden dürfen.[5] Die Elemente-Beziehung ist nun einerseits zwar ‚erzeugend' im Sinne Goodmans, andererseits aber keine ‚generating-relation', welche Goodmans nominalistischen Ansprüchen genügt, da aus den gleichen Elementen verschiedene Dinge produziert werden. Aus dem Individuum *a* lässt sich nicht nur das Singleton $\{a\}$, sondern auch $\{\{a\}\}$ und $\{a, \{a\}\}$ erzeugen, welche sich beide von $\{a\}$ unterscheiden. Bei der Operation wird jedes Mal etwas Anderes generiert, das sich vom zuvor generierten unterscheidet. Die Elemente-Beziehung kann somit keine ‚generating-relation' nach Goodmans Definition sein. Doch wie es möglich, aus denselben ‚Bauklötzen' unendlich viele verschiedene Dinge zu schaffen?

Es ist besonders das Verdienst von Lewis,[6] dass er aufgezeigt hat, wie die Mengenlehre metaphysisch verankert werden kann, indem sie auf Prinzipien der Mereologie reduziert wird. Dabei wird die Elemente-Beziehung (*membership relation*) als Teil-Ganzes-Beziehung (*part-whole relation*)

---

[4] Siehe Lewis (1991: 38), Fussnote 7

[5] Anders ausgedrückt könnte man sagen, dass die einzelnen Elemente das Ganze vollständig bestimmen

[6] Lewis (1991). Lewis stützt sich dabei auf seine eigene nominalistische Konzeption, auf Ideen Nelson Goodman sowie das Konzept der *plural quantification.* Die formale Ausarbeitung der Mereologie geht auf Lesniewski zurück. Auf eine Darstellung der Vorgänger von Lewis und ihrer Ideen wird in dieser Arbeit verzichtet.

aufgefasst. Die Teilmengen (*subclasses*) entsprechen den (mereologischen) Teilen eines Ganzen; eine Menge ist die mereologische Summe (bzw. die ‚Fusion') aller Singletons der Teilmengen. Eine Menge *A* ist genau dann Teil einer anderen Menge *B* (im Sinne der Mereologie), wenn sie eine Teilmenge der anderen Menge *B* ist. Lewis' Analyse der Mengenlehre als Mereologie soll hier weder detailliert dargestellt noch kritisiert werden. Sie wird in dieser Arbeit diskussionslos angenommen. Wichtig ist jedoch die Tatsache, dass diese ‚reduktive' Analyse nur ein Teil von Lewis' Programm ist – und wie sich herausstellt, der unproblematische Teil des ‚*many into one*'.

Durch diese Fundierung der Mengenlehre in der Mereologie erhofft sich Lewis vor allem denjenigen Vorteil auszunutzen, den die Mereologie gegenüber der Mengenlehre auszeichnet: Die Teilbeziehung gilt für alle Fälle ohne Ausnahme. *Jeder* Teil ist ein Teil eines Ganzen und *jedes* Ganze besteht aus Teilen. Der Mereologie liegen zwei wichtige Thesen zugrunde: Zum einen besagt das Axiom der *unrestricted composition*, dass es für jede Gruppe von Objekten eine Fusion dieser Objekte gibt, wobei jedes dieser Objekte ein Teil der Fusion ist. Zum andern besagt das Axiom der *uniqueness of composition*, dass es nur *eine* Fusion dieser Objekte gibt.

(Unrestricted of Composition)	Whenever there are some things, then there exists a fusion of those things.
(Uniqueness of Composition)	It never happens that the same things have two different fusions.[7]

Wie steht nun eine solche Fusion von Objekten in der Welt? Gemäss Lewis ist Mereologie ontologisch ‚*innocent*',[8] d.h. eine Fusion von Dingen verpflichtet uns nicht zur Existenz von etwas Zusätzlichem zu diesen Dingen. Die Fusion ist nichts weiter als die Komposition der Teile, sie ist kein zusätzliches Objekt. Lewis schreibt, dass „*given a prior commitment to cats, say, a commitment to cat-fusions is not a further commitment*."[9] Doch stimmt das? Zum einen kann man fragen, ob sich die ‚*innocence*' auf die Materie oder Form bezieht. Lewis bezieht sich offensichtlich auf die Materie, d.h. eine Fusion führt keine zusätzliche materiell-konkrete Dinge ein. Doch könnte man nicht die Fusion als etwas Abstraktes betrachten (wie z.B. eine Zahl oder eine Menge – was Lewis natürlich ablehnen würde)? Die fünf Katzen in meinem Zimmer wären dann sehr wohl etwas anderes als die Fusion der Katzen. Reale Katzen schlürfen Milch, während die Fusion der Katzen dies nicht tut. Mit dem Prinzip der Identität des Ununterscheidbaren könnte man argumentieren, dass eine Fusion aufgrund der verschiedenen Eigenschaften von den Dingen unterschieden werden muss – und somit doch irgendwie etwas Anderes in die Welt einführt. Lewis lehnt dies jedoch ab und hält an seiner Definition fest: „*I say that composition – the relation of part to whole, or better, the many-one relation of many parts to their fusion – is like identity*."[10]

[7] Lewis (1991: 74)
[8] Lewis (1991: 81)
[9] Lewis (1991: 81)
[10] Lewis (1991: 82)

Im Gegensatz zur Elementbeziehung ist die Teil-Ganzes Beziehung transitiv. Wenn das Ohr ein Teil von Roger Rabbit ist, und Roger Rabbit ein Teil der Fusion aller Hasen, dann ist auch das Ohr ein Teil der Hasen-Fusion. Die Elementsbeziehung hingegen ist nicht transitiv: Wenn A = {1, 2} und B = {3, 4, {1, 2}}, dann ist 1 zwar ein Element von A, aber nicht von B. Die Transitivität der Teil-Ganzes Beziehung erweist sich als Vorteil für die Mereologie: “*This makes mereology much weaker than set theory, but gives the advantage of ontological parsimony. E.g., mereology does not posit the proliferation of entities found in set theoy, such as ∅, {∅}, {{∅}}, etc.* “[11] Es könnte nun scheinen, dass die Transitivität als Unterscheidungsmerkmal dazu führt, dass die Teil-Ganzes Beziehung nicht mit der Elementbeziehung identifiziert werden darf. Lewis gesteht zwar ein, dass die Elementbeziehung und die Teil-Ganzes-Beziehung formal zweifellos unterschiedlich sind, aber dennoch verhalten sich die beiden Beziehungen ähnlich.[12] Die Elementbeziehung ist insofern mit der Teilmengen-Beziehung verwandt, als *a* ein Element von *b* ist genau dann, wenn das Singleton von *a* eine Teilmenge ist von *b.* Wenn alle Mengen nun tatsächlich nichts anderes sind als Teile eines Ganzen, dann wäre das Problem der ontologischen Extravaganz gelöst, welche durch die Hierarchisierung von Mengen eingeführt wurde.

Lewis Hauptthese ist somit erstens, dass die Elementbeziehung nicht als primitiv vorausgesetzt, sondern als Teil-Ganzes Beziehung aufgefasst wird. Zweitens sind die Teile (*parts*) einer Menge (*class*) identisch mit den Teilmengen (*subclasses*).[13] Die Mengen sind dabei Fusionen von Singletons (*unit class*, Einermenge), welche ausser sich selbst keine Teilmengen (und somit keine echten Teile) enthält. Das Singleton ist somit ein mereologisches Atom. Da alles, was Element einer Menge (*class*) sein kann, ein Singleton hat, korrespondieren die Singletons eins-zu-eins mit Individuen und Mengen (*sets*).

[11] Forrest (1998)
[12] Lewis (1991: 5)
[13] „*Our Main Thesis says that the parts of a class are all and only its subclasses*.“ Lewis (1991: 15). Die deutsche Sprache lässt diese Identität trivial erscheinen, doch anhand des englischen Sprachgebrauchs zeigt sich, dass dies keineswegs trivial ist

3. Mysteriöse Singletons

3.1. Die Natur von Singletons

Was allerdings in Lewis' Konzeption mereologisch undefiniert bleibt, sind die Singletons. Sie werden als primitive ‚Atome' schlichtweg vorausgesetzt. Eine genaue Definition dieser atomaren Teile findet sich auch in keiner der gängigen Definitionen von Mengen – obwohl sie das rätselhafte ‚*one into many*' sind, auf dem die ganze Mengentheorie aufbaut. Auch Lewis stösst bei den Singletons an Grenzen, er bezeichnet sie als mysteriös: „*Singletons* [...] *are profoundly mysterious*."[14] Obwohl wir Singletons nicht erklären können, scheinen wir dennoch irgendwie eine intuitive Ahnung zu haben, was Singletons sind. Wenn vor mir eine Kaffeetasse steht, dann scheint es klar zu sein, was unter der Einermenge der Kaffeetasse zu verstehen ist: Jene Menge, welche die Kaffeetasse als einziges Element enthält. Etwas intuitiv zu erfassen heisst jedoch nicht, es vollständig zu verstehen – so hält auch Lewis fest: „*And so I have to say, gritting my teeth, that somehow, I know not how, we do understand what it means to speak of singletons*."[15] Die Frage ist nun, ob man aufgrund dieser 'intuitiven' Ahnung Singletons als primitiv gegeben akzeptieren möchte und damit hinnimmt, dass die eigentliche Basis der Mengenlehre (und damit der Mathematik) nicht genau definiert ist. Gerechtfertigt scheint diese Annahme durch die Tatsache, dass üblicherweise in der Mengenlehre die Elementsbeziehung (*membership relation*) als primitiv angenommen wird. In der mereologischen Konzeption der Mengenlehre wird diese durch die Teil-Ganzes Beziehung ersetzt und eine Singleton Operation hinzugefügt. Diese ‚Operation' erlaubt es, aus einem atomaren Individuum sein Singleton zu bilden. Wenn es somit gelänge, diese ‚*singleton formation*' begrifflich fassbar zu machen, dann dürfte sich auch die Natur von Singletons erschliessen lassen.

Was können wir über die Natur von Singletons aussagen? Mengentheoretisch gesehen ist ein Singleton die Einermenge (*unit set*), d.h. jene Menge eines Dinges, welche nur das Ding selbst als Element enthält. So ist z.B. $\{x\}$ das Singleton von x und enthält x als einziges Element. Da das Singleton $\{x\}$ ausser x weder weitere Elemente noch irgendwelche Teilmengen (*subclasses*) enthält, ist es ein mereologisches Atom und zeichnet sich dadurch aus, dass es keine echten Teile (*proper parts*) hat. Zudem zeigt sich, dass alles ausser echten Klassen (welche kein Element von etwas sind, und somit nicht Element eines Singletons sein können) genau ein und nur ein Singleton hat. Singletons korrespondieren eins-zu-eins mit Individuen und Mengen.[16] Dadurch könnte man (wie Quine) versucht sein, das Singleton mit seinem Ding oder Individuum gleichzusetzen. Doch dass etwas Konkretes – z.B. dieser Tisch – nicht äquivalent mit seinem Singleton sein kann, dürfte unmittelbar einleuchten. Der Tisch und sein Singleton haben ganz unterschiedliche Eigenschaften. Den Tisch kann ich sinnlich wahrnehmen, was beim Singleton nicht der Fall ist. Zudem kann ein logisches Argument gegen die Äquivalenz von Dingen mit ihren Singletons aufgeführt werden: In der Mengenlehre wird zwischen

[14] Lewis (1991: 57)
[15] Lewis (1991: 59)
[16] Lewis (1993: 212)

der Inklusionsbeziehung (A ist in B enthalten: $A \subseteq B$) und der Elementsbeziehung (A ist Element von B: $A \in B$) unterschieden. Während Inklusion transitiv ist, ist dies bei der Elementsbeziehung nicht der Fall. Nun kann aber gezeigt werden, dass wenn ein Ding und sein Singleton äquivalent sind, dann auch die Inklusions- und Elementsbeziehung äquivalent sind.[17] Dies widerspricht jedoch der Beobachtung, dass Inklusion transitiv ist, die Elementsbeziehung jedoch nicht – die beiden Beziehungen sind somit nicht äquivalent. Somit ergibt sich, dass auch ein Ding und sein Singleton unterschiedlich sein müssen. Lewis dürfte sich dieser Argumentation anschliessen, wenn er feststellt: „*A member of a member of something is not, in general, a member of it; whereas a part of a part of something is always a part of it. Therefore we learn not to identify membership with the relation of part to whole*."[18]

Doch wie soll man sich diesen Unterschied vorstellen? Lassen sich Ding/Individuum und Singleton überhaupt *mereologisch* unterscheiden? Wie lässt sich z.B. das Singleton des Singletons der Katze Possum {{Possum}} unterscheiden von seinem Singleton {{{Possum}}}? Beide Objekte scheinen die gleiche Struktur zu haben und sich in gleicher Weise Raum und Zeit zu entziehen. Das Problem zeigt sich noch deutlicher in Bezug auf konkrete Dinge: Wie kann zwischen dem Individuum Possum und seinem Singleton {Possum} unterschieden werden?

Mengen scheinen nicht in Raum und Zeit zu existieren. Lewis macht uns darauf aufmerksam, dass wir dieses ‚*unofficial axiom*' einfach als gegeben betrachten, ohne uns allzu viele Gedanken darüber zu machen.[19] Könnte es nicht der Fall sein, dass jedes Singleton sich genau dort befindet, wo sich auch sein Individuum befindet? Dann wären Singletons in der Tat räumlich lokalisierbar. Zwar ist es schwer vorstellbar, wie ein mereologisch atomares Singleton dieselben Raumzeit-Punkte teilen kann wie ein konkretes Ding, welches verschiedene Teile (*parts*) aufweist. Haben diese Teile auch ihre Singletons? Dann wären zwei Singletons am selben Ort, und dies scheint unplausibel zu sein. „*If every singleton was where its member was, then in general, classes would be where their members were.*"[20] Die Menge aller Katzen wäre derart aufgeteilt, dass sich überall dort, wo sich gerade eine Katze befindet, sich einer Teil der Menge befindet. Ist dies plausibel? Lewis kommt zum Schluss, dass wir schlicht nicht wissen, ob Mengen in Raum und Zeit sind oder nicht. Da "*we haven't a clue whether they are or whether they aren't* [in space and time, HM]"[21], scheint es in der Tat voreilig zu schliessen, dass sie *nicht* in Raum und Zeit sind.

Wenn das Singleton ein Spezialfall wäre, dann könnte eine intuitive *ad hoc* Lösung akzeptiert werden. Doch das Singleton ist kein Spezialfall, denn erstens bestehen alle Klassen aus Singletons (als Fusion)

[17] Kanamori (2003: 284)
[18] Lewis (1991: 3)
[19] Lewis (1991: 31f)
[20] Lewis (1991: 32)
[21] Lewis (1991: 33)

und zweitens werden Singletons auf jeder Stufe gebildet als Singletons einer bereits bestehenden Menge, welche nur diese Menge als Element enthält. Die Elemente von Singletons beschränkten sich nicht auf Individuen, sondern können auch andere, früher gebildete Mengen sein.
Da jedoch Singletons *kein* Spezialfall sind, überträgt sich die Unkenntnis über die Natur von Singletons auf die Natur der Mengen, deren Wesen uns ebenfalls nicht klar ist, solange die Singleton-Frage offen bleibt. *"But since all classes are fusions of singletons, and nothing over and above the singletons they're made of , our utter ignorance about the nature of the singletons amounts to utter ignorance about the nature of classes generally*"[22] In Lewis' Programm bestehen Mengen aus ihren Singletons und aus nichts anderem. Mengen können durch ihre Singletons vollständig erklärt werden. Wenn es nun nicht gelingt, zu erklären, was Singletons sind, wie können wir denn wissen, was Mengen sind – welche ja aus den Singletons (und nichts anderem) bestehen? Wie auch immer die Lösung aussieht, sie muss sowohl für abstrakte Dinge als auch konkrete Dinge gleich plausibel sein.

Viel mehr scheinen wir nicht über Singletons zu wissen. So fragt auch Lewis rhetorisch: "*What do we know about singletons when we know only that they are atoms, and wholly distinct from the familiar individuals? What do we know about other classes, when we know only that they composed of these atoms about which we know next to nothing?*"[23] In der Tat stellt sich die Frage, wie hilfreich eine Theorie ist, welche zwar das ganze Gebäude der Mengenlehre erklärt, deren Fundament selbst jedoch im Dunklen bleibt und schlichtweg vorausgesetzt werden muss? Wie zuverlässig ist eine Theorie, dessen fundamentales Prinzip nicht klar aufgezeigt werden kann, sondern einfach angenommen wird, dass es intuitiv verstanden wird? Lewis bringt es auf den Punkt: Wenn die ganze Mathematik auf seiner Katze Possum und deren Singleton {Possum} aufgebaut werden kann, und somit von diesen zwei (beliebigen) Objekten abhängt – für wie zuverlässig können wir diese Theorie der Mathematik halten?

3.2. Die Element-Singleton Beziehung

Da es schwierig scheint, die Natur von Singletons zu fassen, kann die Frage vielleicht von anderer Seite angegangen werden, indem die Relation zwischen Ding und Singleton (*member-singleton relation*) untersucht wird. Wenn man von einem Ding a ausgeht und verständlich machen kann, in welcher Beziehung a zu seinem Singleton $\{a\}$ steht, dann müsste auch die Natur von $\{a\}$ zu erfassen sein. Es stellt sich jedoch die Frage, wie eine Beziehung verstanden werden kann, wenn nicht klar ist, zwischen was genau diese Beziehung besteht. Denn mindestens eines der beiden Relata – das Singleton – konnte bisher nicht in seinem Wesen erfasst werden. Allerdings liegt das Problem noch tiefer, denn die Beziehung selbst erweist sich als Knacknuss: Stellt man sich die Frage, ob die Element-Singleton Beziehung eine interne oder externe ist, scheint die Antwort ein ‚weder – noch' zu sein.

---

[22] Lewis (1991: 31)
[23] Lewis (1991: 31)

Rein *intern* kann Beziehung zwischen Element und Singleton nicht sein. Eine Relation R ist intern genau dann, wenn R auf die intrinische Eigenschaft von a und b superveniert; oder anders ausgedrückt, wenn a' die gleichen intrinischen Eigenschaften wie a, und b' die gleichen intrinsischen Eigenschaften wie b hat, dann ist R(a, b) äquivalent mit R(a', b'). Eine interne Relation ist durch die intrinschen Eigenschaften vollständig festgelegt. Seien a und b zwei Individuen mit denselben intrinsischen Eigenschaften. Wäre es eine intrinsische Eigenschaft von a, Element von $\{a\}$ zu sein, dann gilt: $a \in \{a\}$ gdw. $b \in \{a\}$. Aber aufgrund des Extensionalitätsaxioms und weil a nicht identisch mit b ist, gilt $a \in \{a\}$ und $b \notin \{a\}$, woraus sich ein Widerspruch ergibt. $\{a\}$ ist das Singleton von a, nicht aber von b.

Wäre die Element-Singleton Beziehung rein *extern*, dann müssten sich Singletons entweder in die Raumzeit-Struktur einordnen lassen oder Beziehungen zu etwas ausserhalb der Raumzeit-Struktur unterhalten. Wie oben gezeigt wurde, ist jedoch überhaupt nicht klar, ob sich Mengen in Raum und Zeit einordnen lassen oder ob sie sich ausserhalb befinden. Wenn sich zwei Dinge an genau denselben Raumzeit-Punkten befinden, sind sie dann nicht insofern identisch miteinander, als sie dieselben externen Beziehungen zu einem anderen Ding unterhalten?[24] Wenn sich das Singleton an denselben Raumzeit-Punkten wie sein Ding befindet, würden sich die beiden nicht unterscheiden in Bezug auf ihre externen Relationen. Seien das Individuum a und sein Sinlgeton $\{a\}$ an den exakt selben Raumzeit-Punkten. Ihre externe Beziehungen zu einem dritten Ding x wären genau dieselben, aber dennoch ist $\{a\}$ nicht identisch mit a. Das Singleton meiner Kaffeetasse unterscheidet sich sehr wohl von der Kaffeetasse selbst. Zudem wäre das Ding nicht nur mit seinem Singleton identisch, sondern auch mit dem Singleton des Singletons, dem Singleton des Singletons des Singletons, und so weiter. Das Individuum wäre identisch mit der ganzen (unendlichen) Mengenhierarchie, welche auf dem Individuum aufgebaut ist.

Vielleicht ist die Element-Singleton Beziehung als Eigenschaft zu definieren, so dass $\{a\}$ eine Eigenschaft von a ist – die Eigenschaft ein Element zu sein?[25] Dies würde jedoch nicht das Problem lösen, sondern nur Worte vertauschen: Statt von einer ‚Element-Singleton Beziehung' würde einfach von einer ‚Singleton-Eigenschaft des Individuums' gesprochen werden. Aber wie sich in diesem Fall die Singletons voneinander unterscheiden können, wäre nicht erklärt. Vielleicht ist die Element-Singleton Beziehung eine Mischung aus interner und externer Relation – gegenwärtig scheint es jedoch keinen plausiblen Vorschlag zu gegen, wie man sich diese Beziehung vorzustellen hätte. Die Frage nach der Beziehung zwischen Element und Singleton scheint sich im Kreis zu drehen. Nach

[24] Es könnte eine rein externe Theorie vertreten werden, dass zwei Dinge, die sich an exakt denselben Raumzeitpunkten befinden, miteinander identisch sind. Dies ist jedoch umstritten, denn diese zwei Dinge könnten sich immer noch in Bezug auf intrinsische Eigenschaften unterscheiden.

[25] Siehe Armstrong (1991); siehe auch Armstrong (1978): *Nominalism and Realism. Universals and Scientific Realism*. Im vierten Kapitel dieser Arbeit wird kurz auf Armstrongs Vorschlag eingegangen.

dem Grund muss nicht weit gesucht werden: "*Because we know so little about the singletons, we are ill-placed even to begin to understand the relation of a thing to its singleton*."[26]

Die Problematik dieser Beziehung steht auch hinter dem obigen Zitat, in welchem die Mengenlehre von Lewis als scheinbar ‚*innocent*' bezeichnet wird. Wie bereits kurz erwähnt, unterteilt Lewis die Mengenlehre in zwei ‚Bereiche': Einerseits scheint die Mengenlehre eine Art von ‚*many-into-one*'-Prinzip zu sein, in dem aus einer Ansammlung von Dingen die Menge dieser Dinge gebildet wird. Aus dem Bleistift, dem Radiergummi, dem Notizblock und der Kaffeetasse ergibt sich die Menge aller Dinge auf meinem Tisch. Dieser Teil der Mengenlehre kann auf Mereologie reduziert werden. Das „*seems*" in Lewis' Zitat deutet jedoch darauf hin, dass es mit der Bildung von Mengen so einfach nicht sein kann. Die obige Definition setzt voraus, dass es bereits mehrere Dinge gibt. Dies muss in der Mengenlehre jedoch nicht vorausgesetzt werden, denn es genügt vollkommen, wenn es ein einziges Ding gibt. Aus einem Ding wird eine ganze Hierarchie von Mengen aufgebaut, so dass man von einem ‚*one-into-many*'-Prinzip sprechen könnte. Die resultierende ontologische Extravaganz ist nun bestimmt nicht mehr ‚*innocent*', wie Lewis zu recht feststellt.[27] Man könnte sogar noch einen Schritt weitergehen und die leere Menge betrachten, wo es Fall zu sein scheint, dass aus ‚Nichts' eine ganze Mengenhierarchie hervorgezaubert werden kann. Aus dieser Betrachtung sind die Singletons die ‚*building blocks*' aller Mengen. Hier stellt sich natürlich sofort die Frage, *wie* denn Singletons aus Dingen entstehen – wie Singletons aus Dingen ‚generiert' werden. Dies soll im nächsten Abschnitt untersucht werden.

3.3. Singleton Operationen

Selbst *wenn* beantwortet ist, was die Natur von Singletons ist und wie sie mit einem Objekt in Beziehung stehen, bleibt eine weitere Frage unbeantwortet: Wie werden Singletons generiert? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, dass von einem Ding seine Einermenge, sein Singleton gebildet werden kann? Wie oben bereits dargestellt wurde, muss dieses ‚Ding' kein Konkretes sein – Mengen können auch von abstrakten Dingen gebildet werden, ja es braucht nicht einmal ein ‚Ding' dazu. Angenommen, vor mir steht eine Kaffeetasse. Wie wird aus diesem Objekt das Singleton {Kaffeetasse} gebildet? Anders formuliert: Was erlaubt es uns, das Objekt x mit einer Mengenklammer zu versehen und dadurch, ein zweites, von x distinktes Objekt zu bilden?

Es dürfte hilfreich sein, zuerst danach zu fragen, was aus der Operation der Mengenklammer resultiert: Zum einen findet diese Operation auf *jeder* Ebene statt. Von einem einzelnden Ding kann eine Menge gebildet werden, welche nur dieses Ding als Element enthält. Von einer grossen oder kleinen Menge kann mit derselben Operation eine weitere Menge gebildet werden, welche die ursprüngliche Menge als Element enthält. Diese iterative Mengenbildung führt dazu, dass die resultierenden Mengen

[26] Lewis (1993: 217)
[27] Lewis (1991:6)

hierarchisch strukturiert sind. Jedes Objekt hat genau ein Singleton, welches das Objekt als einziges Element enthält, wobei diese Objekte in einem gewissen Sinne immer ‚grösser' werden, da sie das Singleton einer verschachtelten Mengenhierarchie sein können. Damit diese Struktur jedoch möglich ist, muss die Mengenoperation auf jeder Ebene die gleiche sein – ob der Schritt von einem konkreten Ding zu seinem Singleton erfolgt, oder die Mengenbildung mit Ordinal- oder Kardinalzahlen erfolgt. Dies scheint sonderbar zu sein: Stellen wir uns eine Mengenhierarchie vor, welche mit einem individuellen Ding beginnt. Im ersten Schritt erfolgt ein Sprung von einem konkreten Ding zu einer abstrakten Menge; dann ist der Schritt von etwas Abstraktem zu etwas Abstraktem; wie kann diese Operation gleich für alle Schritte sein? Offensichtlich stellt sich die Frage, wo und der Schritt vom Materiellen ins Immaterielle erfolgt. Dieser Schritt erfolgt nur einmal, und dennoch soll die Operation immer dieselbe sein – sie muss somit in gewisser Weise losgelöst sein von der Beschaffenheit der Mengen, d.h. unabhängig davon, ob die involvierten Objekte konkret oder abstrakt sind.

Zusammengefasst muss die ‚singleton-forming operation' somit mindestens zwei Eigenschaften aufweisen: Strukturierung und (unendliche) Replizierbarkeit. Durch diese Operation werden auf jeder Stufe der Mengenhierarchie aus den Individuen Einermengen (unit sets, Singletons) gebildet, welche immer Atome sind. Welche Möglichkeiten ergeben sich nun für den Singleton-Operator? Entweder wird er als primitiv angenommen, oder er wird in eine strukturalistische Konzeption eingebaut, wie sie von Burgess und Hazen entwickelt wurde. Auf diese Konzeption kann jedoch an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Details finden sich im Anhang zu Lewis (1991).

Eine verbreitete Metapher für die Funktion der Mengenbildung ist die „Lasso-Hypothese". Gemäss dieser Ansicht wird das Singleton von x so gebildet, wie wenn ein Lasso um x geworfen würde, so dass $\{x\}$ resultiert. Das Singleon $\{x\}$ besteht somit aus x sowie einem Lasso. Das Singleton $\{y\}$ besteht aus y sowie einem Lasso. Es stellt sich nun die Frage, ob dieses „Lasso" dasselbe ist für x und für y? Wie Lewis zeigt, muss es für jedes Objekt ein anderes Lasso sein.[28] In der Frage nach der Natur von Singletons hilft dies allerdings nicht weiter, denn aus der Frage „Was ist ein Singleton?" wird die Frage „Was ist ein Lasso?", bzw. es müsste erklärt werden, was denn die Beziehung eines Dinges zu seinem Lasso wäre. Wenn nun für jedes Objekt ein neues ‚Lasso' gebraucht würde, wäre zudem auch die Bedingung der unendlichen Replizierbarkeit verletzt.

Eine zusätzliche Überlegung zur gegenseitigen Abhängigkeit zwischen Individuum und Singleton bringt Kit Fine ins Spiel:[29] Im Gegensatz zur Modalität (z.B. ‚notwendig') ist Essentialität nicht symmetrisch. Für $\{a\}$ ist es zwar wesentlich, a als Element zu haben, aber das Singleton $\{a\}$ ist für a nicht wesentlich. Dies deutet auf eine Asymmetrie in der Beziehung zwischen einem Ding und seinem Singleton. Während das Singleton $\{a\}$ nicht ohne sein Element existieren könnte, ist das Individuum a

[28] Lewis (1991:44)
[29] Fine (1994: 4)

sehr wohl ohne sein Singleton vorstellbar. Wenn ich das Singleton {Kaffeetasse} betrachte, ist die Existenz der konkrete Kaffeetasse eine notwendige Voraussetzung dafür, aber wenn ich aus meiner Kaffeetasse trinke, kann ich dies ohne Gedanken an das Singleton {Kaffeetasse} tun. Eine Menge hängt wesentlich von ihren Elementen ab, während umgekehrt dies nicht der Fall ist. Eine Theorie der Singleton-Operation muss diese Asymmetrie berücksichtigen.

3.4. Lewis' strukturalistische Lösung

Ein Merkmal der Singleton-Funktion ist es, dass sie auf einzelne Individuen oder Mengen immer wieder angewandt werden kann. Solche repetitiven Funktionen sind innerhalb der Mathematik seit langem bekannt – so ist z.B. in den Peano Axiomen die Nachfolger-Funktion definiert, dass jede natürliche Zahl einen Nachfolger hat, wobei es keine zwei Zahlen mit demselben Nachfolger gibt. [30] So wie es nun nicht *die* Nachfolger-Funktion gibt, so gibt es auch nicht *die* Singleton-Funktion. Um den Singleton-Operator zu untersuchen würde es ausreichen, *eine* Singleton-Funktion zu untersuchen, bzw. zu untersuchen, was es heisst, eine Singleton-Funktion zu sein. Lewis geht diesen Weg, indem er eine Singleton-Funktion als eineindeutige Funktion S definiert, so dass

I. The range of S consists of atoms (called s-singletons)
II. The domain of S consists of all small functions of s-singletons together with all things (called s-individuals) that have no s-singletons as parts
III. All things are generated from the s-individuals by iterated application of S and of fusion [31]

Die Singleton-Funktion weist somit den (mereologischen) Atomen ihr Singleton zu, so erhält z.B. das Individuum Kaffeetasse das Singleton {Kaffeetasse}. In anderen Worten, die Singleton-Operation funktioniert wie eine Variable, der aus einem definierten Bereich ein semantischer Gehalt zugeordnet wird. Die Singleton-Funktion auf diese Art strukturalistisch zu definieren hat jedoch seine Tücken: Das Problem dabei ist, dass keine Eindeutigkeit besteht in Bezug auf die Nachfolger-Funktion. Vereinfacht gesagt, legen die Peano Axiome durch die Funktion x + 1 fest, wie die ganzen Zahlen aufgebaut werden. Genausogut könnte man durch die Funktion x + 2 die geraden Zahlen definieren – alle Peano Axiome wären ebenso erfüllt. Es ist nicht eindeutig festgelegt, welche Funktion gelten soll. Dasselbe Problem ergibt sich auch für die Singleton-Funktion. Zwar können mit der Singleton-Operation aus den Individuen a, b und c die Singletons $\{a\}$, $\{b\}$ und $\{c\}$ gebildet werden, aber genauso gut können die $\{a, x\}$, $\{b, x\}$ und $\{c, x\}$ produziert werden. Welche Operation ist nun die ‚Korrekte'? An sich ist dies kein grosses Problem, doch es ist klar, dass eine strukturalistisch definierte Singleton-Funktion am selben Problem krankt wie der Strukturalismus selbst.

---

[30] Zu erwähnen ist Zermelos Modell der Peano Axiome, in welchem er die Nachfolger als Singletons konstruierte
[31] Lewis (1993: 220f). ‚Small' ist etwas genau dann, wenn „*its atoms do not correspond one-one with all the atoms*." Klausel II wird folgendermassen interpretiert: „*If there are some things, and every s-individual is one of them, and when x is one of them so is s(x), and every fusion of some of them is one of them, then everything is one of them*."

4. Die Metaphysik von Singletons

Lewis scheint mit seiner ernüchterten Feststellung recht zu haben, dass wir zwar intuitiv eine gewisse Ahnung davon haben, was Singletons (und somit Mengen) sind oder sein sollten, jedoch nicht in der Lage sind, die Natur von Singletons im Detail zu erfassen. In der Tat sind Singletons „*profoundly mysterious*“[32]. Den Mathematiker mag dies nicht weiter in seiner Arbeit beeinträchtigen. Der Metaphysiker steht jedoch vor einem Dilemma: Einerseits will er nicht (und kann schon gar nicht) den Mathematikern ihre Grundlage entziehen, in dem er ihnen vorwirft, mit etwas zu hantieren, was gar nicht verstanden wird. Schliesslich hat sich das Gebilde der Mengenlehre als äusserst fruchtbar und stabil erwiesen, so dass wohl kaum ein vernünftiger Mensch darauf verzichten würde, nur weil ein kleiner Teil der Theorie sich als philosophisch problematisch erweist. Andererseits ist es jedoch gerade das Bemühen des Metaphysikers, eine Theorie als Ganzes zu verstehen, insbesondere deren Fundament. Wenn sich dieses als undefinierbar, vage oder nicht eindeutig erweist, ist dies philosophisch kaum zufriedenstellend. Seit Erscheinen von *Parts of Classes* hat es deshalb verschiedene Versuche gegeben, Singletons metaphysisch zu erfassen. Auffallend bei diesen Vorschlägen ist die Tatsache, dass sie alle von der bestehenden metaphysischen Position des jeweiligen Autors ausgehen und Singletons in diesen Rahmen integrieren. Auf die Natur von Singletons wird nicht konkret eingangen, so dass Lewis' Verdikt durch die Jahre stärkeres Gewicht erhält. Als Ausblick soll an dieser Stelle auf zwei Vorschläge eingegangen werden. D.M. Armstrong deutet das Singleton als ein Sachverhalt, während John Bigelow Singletons als Universalien bzw. Haeccitäten interpretiert. Lewis erwähnt weitere Alternativen, den Begriff des Singletons in eine metaphysische Theorie zu integrieren, steht allerdings allen Versuchen skeptisch gegenüber.[33]

4.1 Singletons als Sachverhalte (*states of affairs*)

Im Gegensatz zu Lewis geht Armstrong davon aus, dass Singleton und Element nicht ‚*wholly distinct*', sondern in ihrem Wesen verbunden sind. Zudem möchte Armstrong an der Idee festhalten, dass Teilmengen mereologische Teile sind – zusammengesetzt aus ihren Singletons. Basierend auf seiner Beschäftigung mit Sachverhalten weist Armstrong darauf hin, dass Mengen und Sachverhalte vergleichbare Charakteristiken aufweisen, so dass die Vermutung nahe liegt, Mengen auf Sachverhalte zu reduzieren.[34] Zum einen sind Mengen mit Sachverhalten insofern vergleichbar, als beides keine Universalien, sondern partikuläre Dinge sind. Zweitens sind sich Mengen und Sachverhalte ähnlich in Bezug auf Mereologie. Das Verhältnis zwischen Teilmenge und Menge widerspiegelt das Verhältnis zwischen Sachverhalten, bzw. zwischen einem Objekt a und dessen Eigenschaft F. Schliesslich ist sowohl bei Mengen wie auch bei Sachverhalten nicht klar, wo sie sich genau befinden – „*their location is strange and ambiguous*.“[35] Armstrong gesteht zwar, dass diese Ähnlichkeiten zwischen

[32] Lewis (1991: 57)
[33] Lewis (1991:54f)
[34] Die Existenz von Sachverhalten ist natürlich keineswegs umstritten. Auf die Begründung der Existenz von Sachverhalten und deren Problematik soll hier allerdings nicht eingegangen werden.
[35] Armstrong (1991:195)

Mengen und Sachverhalten nicht beweisen, dass Mengen eine Art von Sachverhalte sind. Doch selbst wenn davon ausgegangen wird, dass Mengen auf Sachverhalte reduziert werden können, so bleibt doch die Frage, was für eine Art von Sachverhalten Mengen, insbesonders Singletons, sind.

Um Singletons als Sachverhalte aufzufassen, propagiert Armstrong eine Art von nicht-mereologischer Zusammensetzung (*non-mereological composition*). Dies ist deshalb notwendig, da es verschiedene Dinge gibt, welche aus denselben Teilen (*constituents* in Armstrongs Terminologie) zusammengesetzt sind. Armstrong geht mit Lewis darin einig, dass sich Mengen aus Teilen (*units*) zusammensetzen. Diese ‚*units*', von Lewis als Singletons identifiziert, sind gemäss Armstrong monadische Sachverhalte. Vereinfacht gesagt, besteht dieser Sachverhalt aus einem partikulären Individuum und dessen Eigenschaft, ein Einzelding zu sein (Armstrong nennt diese Eigenschaft „*a unit-making property*"). Das Singleton ist somit eine Instanz dieser Eigenschaft höherer Ordnung, welche Armstrong „*unithood*" nennt. In Armstrongs Worten: "*A unit class is a monadic state of affairs, where the particular is the member of the unit-class, and the property is a unit-determining property instantiated by the member.*"[36] Das Singleton $\{a\}$ ist somit ein Sachverhalt, welcher das Element a beinhaltet - nämlich der Sachverhalt, dass a ein einzelnes Ding ist oder eine andere ‚*unit-determining property*' hat.

4.2 Singletons als Universalien oder Haeccitäten

Ausgehend von der These „*that mathematics is the theory of universals*"[37] und der Hypothese, dass die Mengenlehre durch die zunehmende Abstraktheit der Mathematik entstand, stellt John Bigelow die Frage: „*How then could the theory of universals have generated set theory?*"[38] Die Fragestellung ist somit gerade umgekehrt – es wird nicht ausgehend von Mengen gefragt, ob und worauf sie reduziert werden können, sondern danach, woraus und wie sie entstanden sind. Die Frage nach der Reduktion ergibt sich darauf von selbst. Wenn Mengen tatsächlich aus der Mathematik entstanden und diese eine Universalientheorie ist, dann liegt der Schluss nahe, dass Mengen (und somit Singletons) ebenfalls Universalien sind.

Gemäss Bigelow sind Mengen ‚*individual essences*[39]' – Eigenschaften, welche insofern wesentlich sind für ein Individuum, dass sie und das Individuum in einer gegenseitigen Abhängigkeitsbeziehung stehen. Diese Eigenschaft trifft insbesondere auf das Singleton zu. Das Singleton $\{a\}$ ist ein Universal, welches das Individuum a einerseits notwendigerweise hat und andererseits nicht mit anderen Objekten gemeinsam haben kann. Bigelow propagiert, dass „*sets boil down, philosophically, to*

[36] Armstrong (1991: 197)
[37] Bigelow (1988:101)
[38] Bigelow (1988:103)
[39] Im Gegensatz zu etwas Wesentlichem (*essence*) kann etwas individuelle Wesentliches (*individual essence*) nicht mit anderen Dingen geteilt werden. Siehe Bigelow (1993: 82)

aggregates of individual essences."[40] Bigelow interpretiert die Element-Beziehung als Instanziierung: Wenn das Individuum *a* zum Singleton {*a*} gehört, instantiiert *a* die Einermenge {*a*}.[41] Doch da Singletons mereologische Atome sind, können sie nicht einfach eine beliebige individuelle Wesenheit sein, denn diese könnte auch ein anderes Individuum haben. Auch eine Konjunktion von individuellen Wesenheiten ist auszuschliessen, denn dies würde heissen, dass diese Wesenheiten Teile (*parts*) hätten, was jedoch im Falle von Atomen gerade nicht der Fall sein kann. Bigelow löst das Problem damit, dass Singletons für ihn eine Haeccität ist – „*an unstructured, primitive ‚thisness' of a thing*."[42] Eine Menge ist eine plurale Haeccität: „*A set is the theseness of its members*."[43]

Das Hauptproblem dieser beiden metaphysischen Vorschläge besteht darin, dass nicht immer ganz klar ist, inwiefern Armstrong und Bigelow die mereologische Konzeption von Lewis übernehmen und ihr sozusagen ihre eigene Metaphysik aufpflanzen können. Während bei Lewis eine Fusion aus einzelnen Teilen besteht, fusionieren Armstrong und Bigelow Sachverhalte bzw. individuelle Wesenheiten. Eine Untersuchung dieser Frage würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Ebensowenig kann hier auf weitere Alternativen eingegangen werden. Für eine Diskussion der Probleme dieser Vorschläge und Alternativen siehe Lewis (1991: 54ff) sowie Keller (2003: 13ff). Lewis hat 1991 einen Fragenkatalog betreffend Singletons vorgegeben, welcher unverminderte Gültigkeit haben dürfte: „*Where, if anywhere, are they? What is their intrinsic nature? Do they differ qualitatively from one another? Is the relation of member to singleton founded on the qualitative nature of the relata, or is it more like a distance relation, or is it a mixture, or something altogether?*"[44] Jeder Lösungsvorschlag sollte daran gemessen werden, ob er diese Fragen plausibel beantworten kann. Bis dahin bleiben Singletons wohl in gewisser Weise ‚*mysterious*'.

---

[40] Bigelow (1990: 300)
[41] Bigelow (1993: 83)
[42] Bigelow (1990: 299), siehe auch Bigelow (1993: 85f)
[43] Bigelow (1988: 107)
[44] Lewis (1991: 57)

5. Literaturverzeichnis

Armstrong, D.M. (1991): Classes are States of Affairs. *Mind* 100, S. 189 – 200

Bigelow, J. (1988): *The Reality of Numbers*. Oxford: Clarendon Press

Bigelow, J. (1989): Sets are Universals. In: Irvine, A.D. (ed): *Physicalism in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer

Bigelow, J. (1993): Sets are Haecceities. In: Bacon/Campbell/Reinhardt (eds): *Ontology, Causality and Mind – Essays in Honour of D.M. Armstrong. Cambridge*: Cambridge University Press

Fine, K. (1994): Essence and Modality. In: *Philosophical Perspectives* 8, S. 1 – 16

Forrest, P. (1998): Eintrag ‚Mereology'. In: Craig, E. (ed.): *Routledge Encyclopedia of Philosohpy*

Kanamori, A. (2003): The Empty Set, the Singleton, and the Ordered Pair. *The Bulletin of Symbolic Logic* 9 S. 273 – 298

Keller, P. (2003): *Wedding Singletons to the World*. Unveröffentlichtes Manuskript

Lewis, D. (1991): *Parts of Classes*. Cambridge: Blackwell

Lewis, D. (1993): Mathematics is Megethology. In: Lewis, D. (1997): *Papers in Philosophical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press

Pollard, S. (1990): *Philosophical Introduction to Set Theory*. London: University of Notre Dame Press